Grundlagen der linearen Algebra

1. Grundbegriffe

1.1 Vektoren

Aus der Vektorrechung ist bekannt, daß ein Vektor im zweidimensionalen Raum R_2 bei gegebenem Koordinatensystem durch zwei geordnete Zahlen x_1, x_2 definiert ist. Man spricht von den Komponenten des Vektors. Zur Bezeichnung von Vektoren werden im folgenden deutsche Kleinbuchstaben verwendet, die unterstrichen sind. Werden die Komponenten des Vektors untereinander geschrieben, spricht man von Spaltenvektoren, werden die Komponenten nebeneinander geschrieben, so spricht man von Zeilenvektoren. Zeilenvektoren werden durch ein Apostroph gekennzeichnet.

Beispiel: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{x}' = (1, 2)$, $\underline{x} = (1, 2)'$

Der Begriff des Vektors läßt sich einfach auf den n-dimensionalen Raum erweitern: Eine Folge von n geordneten (reellen) Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stellt einen n-dimensionalen Vektor dar. Die Gesamtheit aller n-dimensionalen Vektoren bildet den Vektorraum R_n.

1.1.1 Gleichheit von Vektoren

Zwei Vektoren $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)'$ und $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)'$ sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Komponenten übereinstimmen: $\underline{a} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 & = & b_1 \\ a_2 & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_n & = & b_n \end{matrix}$

1.1.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Gegeben sei der Vektor $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. q sei eine beliebige Zahl. $q\underline{x}$ ist dann ein Vektor mit den Komponenten $q\underline{x}_1, q\underline{x}_2, \ldots, q\underline{x}_n$, also
$q\underline{x}' = (q\underline{x}_1, q\underline{x}_2, \ldots, q\underline{x}_n)$.

1.1.3 Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren bedeutet die Addition ihrer Komponenten. Folglich müssen zwei zu addierende Vektoren dieselbe Anzahl an Komponenten haben. Also ist

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n).$$

1.1.4 Das Skalarprodukt von Vektoren

Für zwei Vektoren $\underline{a}' = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)'$ ist das Skalarprodukt (oft auch als „inneres Produkt" bezeichnet) die Zahl $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Es ist

$$\underline{a}'\underline{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Für das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt sich

$$\underline{x}'\underline{x} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

1.1.5 Die Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors ist die Quadratwurzel seines Skalarprodukts. Man spricht auch vom Betrag eines Vektors oder der Norm eines Vektors. Die Länge eines Vektors $\underline{x}$ wird bezeichnet mit $|\underline{x}|$. Es gilt

$|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x}' \ \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

(Dies ist der Satz des Pythagoras im n-dimensionalen Raum.)

Vektoren mit der Länge Eins heißen Einheitsvektoren. Jeder Vektor beliebiger Länge läßt sich durch die Division durch seine Länge auf die Länge Eins bringen. Man spricht dann von der Normierung des gegebenen Vektors.

1.1.6 Orthogonale Vektoren

$\underline{0}$ sei der Vektor (0, 0, …, 0) und heißt Nullvektor. Haben zwei Vektoren $\underline{a} \neq \underline{0}$ und $\underline{b} \neq \underline{0}$ das Skalarprodukt Null, so bezeichnet man sie als (zueinander) orthogonal.

$\underline{a}'\underline{b} = 0$

bedeutet, daß $\underline{a}$ und $\underline{b}$ zueinander orthogonal sind.

Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ist

$$\cos(\underline{a},\underline{b}) = \frac{\underline{a}'\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} .$$

Folglich stehen orthogonale Vektoren aufeinander senkrecht.

1.1.7 Gesetze bezüglich der Rechnung mit Vektoren

Bezüglich der Addition zweier Vektoren gilt

a) das Kommutativgesetz	$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
b) das Assoziativgesetz	$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$

Bezüglich der Multiplikation von Vektoren mit Skalaren gilt

a) das Kommutativgesetz	$q\underline{x} = \underline{x}q$
b) das Assoziativgesetz	$p(q\underline{x}) = (pq)\underline{x} = pq\underline{x}$
c) das Distributivgesetz	$q(\underline{a}+\underline{b}) = q\underline{a} + q\underline{b}$
	$(p+q)\underline{x} = p\underline{x} + q\underline{x}$

1.1.8 Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren

Die Frage nach der linearen Abhängigkeit ist gleichbedeutend mit der Frage, ob man einen beliebigen Vektor durch einen oder mehrere vorgegebene Vektoren ausdrücken kann. Ist dies möglich, so sind die Vektoren linear abhängig; ist dies nicht möglich, so sind die Vektoren linear unabhängig.

Ist ein Vektor $\underline{a} = q\underline{b}$, so sind die Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ linear abhängig. Analog läßt sich die lineare Abhängigkeit von drei Vektoren darstellen: $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ sind linear abhängig, wenn $\underline{a} = p\underline{b} + q\underline{c}$ (bzw. $\underline{b} = p\underline{a} + q\underline{c}$ bzw. $\underline{c} = p\underline{b} + q\underline{a}$).

m Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_m$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$q_1\underline{x}_1 + q_2\underline{x}_2 + \ldots + q_m\underline{x}_m = \underline{0}$ nur durch $q_i = 0$ für alle i erfüllt werden kann.

Sind m Vektoren linear abhängig, dann ist mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der m - 1 anderen darstellbar.

Im m-dimensionalen Raum sind m + 1 Vektoren stets linear abhängig.

Beispiel: Gegeben sind die Einheitsvektoren
$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)'$
$\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)'$
$\underline{e}_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0)'$
$\vdots$
$\underline{e}_m = (0, 0, 0, \ldots, 1)'$

Es gilt: $q_1\underline{e}_1 + q_2\underline{e}_2 + \ldots q_m\underline{e}_m = (q_1, q_2, \ldots, q_m)'$. Dies ergibt nur dann den Nullvektor, wenn alle $q_i = 0$. Folglich läßt sich durch Linearkombination nicht der Nullvektor erzeugen und das System ist linear unabhängig.

1.2 Matrizen

Unter einer Matrix vom Typ (I,J) versteht man ein System von I • J Größen (hier: reelle Zahlen), die in einem rechteckigen Schema in I Zeilen und J Spalten angeordnet sind. Die Größen heißen Elemente der Matrix. Neben dem Zahlenwert ist auch der Platz in der rechteckigen Anordnung von Bedeutung. Matrizen werden mit unterstrichenen Großbuchstaben bezeichnet. Man kann Matrizen als eine zeilenweise (spaltenweise) Zusammenstellung von Vektoren interpretieren.

Beispiel: $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{I1} & \cdots & x_{IJ} \end{pmatrix}$, die Elemente der Matrix heißen x_{ij}. Die Matrix hat I Zeilen und J Spalten. Die Matrix ist vom Typ (I,J).

Eine Matrix vom Typ (I,I) hat ebensoviel Zeilen wie Spalten und heißt daher quadratische Matrix.

Eine Matrix, deren Elemente alle gleich Null sind, heißt Nullmatrix. Sofern sich der Typ der Nullmatrix nicht aus dem Zusammenhang ergibt, wird die Nullmatrix z.T. mit Indizes versehen, die den Typ kennzeichnen.

Beispiel: $\underline{0}_{3,4}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.1 Gleichheit von Matrizen

Matrizen sind genau dann gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind und jedes Element der einen gleich dem entsprechenden der anderen ist. Mit $\underline{A} = (a_{ij})$ vom Typ (I,J) und $\underline{B} = (b_{ij})$ vom Typ (I,J) ist $\underline{A} = \underline{B}$, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i,j.

1.2.2 Addition von Matrizen

Die Addition (bzw. Subtraktion) ist nur für Matrizen gleichen Typs möglich. Matrizen werden addiert, indem man die entsprechenden Elemente addiert.

Beispiel: $\underline{A} = (a_{ij})$ und $\underline{B} = (b_{ij})$ sind vom Type (I,J). $\underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1J}+b_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{I1}+b_{I1} & \cdots & a_{IJ}+b_{ij} \end{pmatrix}$.

Für die Addition von Matrizen gilt

a) Das Kommutativgesetz: $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

b) Das Assoziativgesetz: $\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$

1.2.3 Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar

Multipliziert man eine Matrix mit einem Skalar, so wird jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert.

Beispiel: $q\underline{X} = \begin{pmatrix} qx_{11} & \cdots & qx_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ qx_{I1} & \cdots & qx_{IJ} \end{pmatrix}$.

Folglich kann ein gemeinsamer Faktor, der in <u>allen</u> Elementen der Matrix enthalten ist, vor die Matrix gesetzt werden.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 12 & 32 & 8 \\ 0 & 16 & 20 \\ 4 & 24 & 12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Multipliziert man eine Matrix $\underline{X}$ mit der Zahl -1, so erhält man die Matrix $-\underline{X}$, die aus $\underline{X}$ durch Umkehr der Vorzeichen aller Elemente hervorgeht. $-\underline{X}$ ist die zu $\underline{X}$ entgegengesetzte Matrix.

Bezüglich der Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar gilt

a) das Kommutativgesetz	$q\underline{X} = \underline{X}q$
b) das Assoziativgesetz	$p(q\underline{X}) = (pq)\underline{X} = pq\underline{X}$
c) das Distributivgesetz	$q(\underline{A}+\underline{B}) = q\underline{A} + q\underline{B}$
	$(p+q)\underline{X} = p\underline{X} + q\underline{X}$

1.2.4 Transposition einer Matrix

Vertauscht man in einer Matrix $\underline{X}$ die Zeilen mit den Spalten, so entsteht die zu $\underline{X}$ transponierte Matrix $\underline{X}'$. Ist $\underline{X}$ vom Typ (I,J), so ist ihre Transponierte $\underline{X}'$ vom Typ (J,I). $\underline{X} = (x_{ij})$ mit Typ (I,J) führt also durch Transposition auf $\underline{X}' = (x_{ji})$ vom Typ (J,I).

Beispiel: $\underline{X} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt:

$(\underline{X}')' = \underline{X}$
$(\underline{A} + \underline{B})' = \underline{A}' + \underline{B}'$

1.2.5 Die Multiplikation von Matrizen

Sollen zwei Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ miteinander multipliziert werden, so muß die Anzahl der Spalten von $\underline{A}$ gleich der Anzahl der Zeilen von $\underline{B}$ sein. Es sei $\underline{A} = (a_{ij})$ vom Typ (I,J) und $\underline{B} = b(_{jk})$ vom Typ (J,K), dann ist $\underline{C} = \underline{AB} = (c_{ik})$ vom Typ (I,K). Um das erste Element c_{11} zu erhalten, muß man das erste Element der ersten Zeile von $\underline{A}$ mit dem ersten Element der ersten Spalte von $\underline{B}$ multiplizieren und dann das zweite Element der ersten Zeile von $\underline{A}$ mit dem zweiten Element der ersten Spalte von $\underline{B}$ multiplizieren und die beiden Produkte addieren. Die Produktbildung und das Addieren der Produkte setz sich fort bis zum letzten Element a_{1J} bzw. $b_{J1.}$ Um das Element c_{12} zu erhalten wird dieses Verfahren auf die erste Zeile von $\underline{A}$ und die zweite Spalte von $\underline{B}$

angewendet. Das Element c_{21} erhält man durch Multiplikation und Addieren der Produkte für die Elemente der zweiten Zeile von $\underline{A}$ und der ersten Spalte von $\underline{B}$. Das letzte Element c_{IK} erhält man durch Multiplizieren und Addieren der Produkte für die letzte Zeile von $\underline{A}$ und die letzte Spalte von $\underline{B}$. Man kann die Multiplikation von Matrizen auch als die Bildung der Skalarprodukte für die Zeilenvektoren von $\underline{A}$ und die Spaltenvektoren von $\underline{B}$ auffassen.

Beispiel: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{C} = \underline{AB}$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} (2*3+4*5) & (2*2+4*1) & (2*2+4*4) \\ (1*3+0*5) & (1*2+0*1) & (1*2+0*4) \\ (1*3+2*5) & (1*2+2*1) & (1*2+2*4) \\ (3*3+1*5) & (3*2+1*1) & (3*2+1*4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 8 & 20 \\ 3 & 2 & 2 \\ 13 & 4 & 10 \\ 14 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Das Kommutativgesetz gilt für die Matrizenmultiplikation im allgemeinen <u>nicht</u>. Im Falle Typ $\underline{A}$ =(I,J) und Typ $\underline{B}$ = (J,K) und I $\neq$ K schließt die Multiplikation $\underline{AB}$ die Multiplikation $\underline{BA}$ aus (siehe obiges Beispiel). Auch die Multiplikation zweier quadratischer Matrizen gleichen Typs liefert in der Regel unterschiedliche Ergebniss, je nachdem, ob man das Produkt $\underline{AB}$ oder $\underline{BA}$ bildet. Aus diesem Grund sagt man, daß die Matrix $\underline{A}$ mit der Matrix $\underline{B}$ „von links“ ($\underline{AB}$) bzw. „von rechts“ $\underline{BA}$ multipliziert wird.

Hingegen gelten sowohl

a) das Assoziativgesetz $\underline{A}(\underline{BC}) = (\underline{AB})\underline{C}$ als auch

c) das Distributivgesetz $(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{AC} + \underline{BC}$

$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{AB} + \underline{AC}$

Für die Multiplikation eines Matrizenprodukts mit einer Zahl gilt

$c\underline{AB} = (c\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(c\underline{B})$.

Die Transponierte eines Matrizenprodukts ist gleich dem Produkt der Transponierten der Faktoren in vertauschter Reihenfolge

$(\underline{AB})' = \underline{B}'\underline{A}'$, $(\underline{ABC})' = \underline{C}'\underline{B}'\underline{A}'$, usw.

1.2.6 Spezielle Matrizen

Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, wenn $x_{ij} = x_{ji}$. Dann gilt: $\underline{X} = \underline{X}'$. Ist $\underline{X}$ vom Typ (I,J), dann ist das Produkt $\underline{XX}'$ eine symmetrische Matrix vom Typ (I,I).

Die Elemente x_{ii} einer quadratischen Matrix bilden deren Hauptdiagonale. Sind alle Elemente einer quadratischen Matrix außerhalb der Hauptdiagonalen null, so heißt diese Matrix Diagonalmatrix.

Eine Diagonalmatrix, deren Elemente nur aus Einsen bestehen, heißt Einheitsmatrix. Diese Matrix das neutrale Element für die Matrizenmultiplikation und wird mit $\underline{I}$ bezeichnet. $\underline{IX} = \underline{X}$, $\underline{XI} = \underline{X}$ (der Typ der Einheitsmatrix ergibt sich aus dem Zusammenhang).

Eine quadratische Matrix, deren Spalten und Zeilen aus paarweise orthogonalen einheitsvektoren besteht, heißt orthogonal. Ist $\underline{T}$ eine orthogonale Matrix, so gilt: $\underline{TT}' = \underline{T}'\underline{T} = \underline{I}$.

1.2.7 Die Spur einer Matrix

Die Spur einer quadratischen Matrix $\underline{X}$ ist definiert als sp $\underline{X}$ = tr $\underline{X} = \sum_{i=1}^{I} x_{ii}$.

1.2.8 Das dyadische Produkt zweier Vektoren

Man kann zwei Vektoren $\underline{a}$ mit I Komponenten und $\underline{b}$ mit J Komponenten auch multiplizieren, indem man $\underline{ab}'$ nach den Regeln der Matrizenmultiplikation bildet. Das Produkt ist eine Matrix vom Typ (I,J) und heißt dyadisches Produkt.

1.2.9 Der Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix gibt die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren an. Der Rang einer Matrix vom Typ (I,J) ist daher maximal min (I,J). Hat eine quadratische Matrix vom Typ (I,I) I linear unabhängige Zeilen- bzw. Spaltenvektoren, so hat sie vollen Rang. Eine Nullmatrix hat den Rang Null. Es gilt:

- Rang $\underline{X}$ = Rang $\underline{X}'$ = Rang $\underline{XX}'$
- Rang $\underline{A}$ = r, Rang $\underline{B}$ = s $\Rightarrow$ Rang $\underline{AB} \leq$ min (r,s)
- Rang $\underline{AB}$ = Rang $\underline{BA}$
- Jede orthogonale Matrix hat vollen Rang

Die praktische Bestimmung des Rangs einer Matrix erfolgt, indem man Zeilen und/oder Spalten nach folgenden Grundsätzen umformt. Diese Operationen Verändern den Rang der Matrix nicht. Die zulässigen Operationen sind:

- Vertauschen je zweier Zeilen oder Spalten
- Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einem Faktor $\neq$ null
- Addition des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte)

Spalten- und Zeilenoperationen lassen sich in beliebiger Reihenfolge durchführen. Ziel dieser Operationen ist es, das Maximum von Nullzeilen bzw. Nullspalten herauszustellen. Die Zahl der verbleibenden Zeilen bzw. Spalten gibt den Rang an.

Beispiel: $\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Substraktion der 2. von der 3. Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$ Addition der 2. mit der 1. Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$ Folglich ist Rang $\underline{X} = 2$.

1.2.10 Die Determinante einer quadratischen Matrix

Die Determinante ist eine Funktion, die jeder quadratischen Matrix $\underline{X}$ eine reelle Zahl det ($\underline{A}$) = $|\underline{A}|$ zuordnet.

- Für eine Matrix $\underline{X}$ vom Typ (1,1) ist $|\underline{X}| = x_{11}$.
- Für eine Matrix $\underline{X}$ vom Typ (2,2) ist $|\underline{X}| = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$.

Allgemein besitzt die Determinante die nachfolgenden Eigenschaften. Die Matrix $\underline{X}$ wird hierfür durch Spaltenvektoren ausgedrückt und geschrieben als $\underline{X} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots \underline{x}_l)$.

- Die Determinante einer Matrix $\underline{X}$ bleibt unverändert, wenn man zu einer beliebigen Spalte i eine beliebige Spalte j $\neq$ i dieser Matrix addiert:
  $|\underline{X}| = |\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_l| = |\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{x}_i + \underline{x}_j, x_{i+1}, \ldots, \underline{x}_l|$

- Wird ein beliebiger Spaltenvektor der Matrix $\underline{X}$ mit einem Skalar q $\neq 0$ multipliziert, so ist die Determinante dieser Matrix das q-fache der Determinante der Matrix $\underline{X}$:
  $|\underline{X}| = |\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_i, \ldots, \underline{x}_l| = \frac{1}{q} |\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, q\underline{x}_i, \ldots, \underline{x}_l|$

- Die Determinante der Einheitsmatrix ist Eins:
  $|\underline{I}| = 1$.

Aus diesen Eigenschaften lassen sich weitere ableiten:

- Der Wert der Determinanten ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte das Vielfache einer anderen Spalte addiert wird:
  $|\underline{X}| = |\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{x}_i + q\underline{x}_j, x_{i+1}, \ldots, \underline{x}_I|$, mit $i \neq j$

- Werden zwei Spalten einer Matrix vertauscht, so kehrt sich das Vorzeichen der Determinanten um:
  $|\underline{X}| = |\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_i, \ldots, \underline{x}_j, \ldots, \underline{x}_I| = - |\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_j, \ldots, \underline{x}_i, \ldots, \underline{x}_I|$

- Die Determinante ist Null, falls ein Spaltenvektor der Nullvektor ist:
  $|\underline{x}_1, \ldots, 0, \ldots, \underline{x}_I| = 0$

- Die Determinante ist Null, falls zwei Spaltenvektoren gleich sind:
  $|\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_i, \ldots, \underline{x}_j, \ldots, \underline{x}_I| = 0$ für $\underline{x}_i = \underline{x}_j$

- Wird ein Spaltenvektor $\underline{x}_j$ durch die Summe zweier Vektoren $\underline{a} + \underline{b}$ ausgedrückt, dann ist die Determinante dieser Matrix gleich der Summe der Determinanten zweier Matrizen, die sich nur um den Spaltenvektor $\underline{a}$ bzw. $\underline{b}$ voneinander unterscheiden:
  $|\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{a} + \underline{b}, x_{i+1}, \ldots, \underline{x}_I| = |\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{a}, x_{i+1}, \ldots, \underline{x}_I| + |\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{b}, x_{i+1}, \ldots, \underline{x}_I|$

- Beim Transponieren ändert sich der Wert der Determinanten nicht. Folglich gelten die Aussagen über die Spalten analog für die Zeilen:
  $|\underline{X}| = |\underline{X}'|$

Die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) von $\underline{X}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $|\underline{X}| = 0$. Wenn $|\underline{X}| = 0$, dann heiß $\underline{X}$ singulär, wenn $|\underline{X}| \neq 0$, dann heißt $\underline{X}$ nichtsingulär. $\underline{X}$ vom Typ (I,I) hat den Rang I, wenn die Matrix nichtsingulär ist. Ist $\underline{X}$ singulär, ist der Rang < I.

Für Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ vom Typ (I,I) gilt:

$|\underline{AB}| = |\underline{A}||\underline{B}|$, folglich ist $|\underline{AB}| = |\underline{BA}|$.

Ist $\underline{T}$ eine orthogonale Matrix, dann gilt $\underline{TT}' = \underline{I}$, also

$|\underline{TT}'| = |\underline{T}||\underline{T}'| = |\underline{T}|^2 = |\underline{I}| = 1$, folglich ist $|\underline{T}| = \pm 1$, und beides kommt vor.

In der Praxis werden Determinanten durch rekursive Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte berechnet, bis man das Problem auf Matrizen vom Typ (2,2) reduziert hat, deren Berechnung problemlos möglich ist.

$\underline{X} = (x_{ij})$ sei eine Matrix vom Typ (I,I) mit Determinante $|\underline{X}|$. Streicht man die i-te Zeile und die j-te Spalte von $\underline{X}$, so erhält man die neue Matrix $\underline{X}_{(ij)}$ vom Typ (I-1,I-1). $|\underline{X}_{(ij)}|$ heißt Unterdeterminante oder Minore von $|\underline{X}|$. $X_{ij} = (-1)^{i+j} |\underline{X}_{(ij)}|$ heißt Kofaktor von x_{ij}. Es gilt:

$$|\underline{X}| = \sum_{j=1}^{J} x_{ij} X_{ij}$$ für alle i („Entwicklung von $|\underline{X}|$ nach der i-ten Zeile) bzw.

$$|\underline{X}| = \sum_{i=1}^{I} x_{ij} X_{ij}$$ für alle j („Entwicklung von $|\underline{X}|$ nach der j-ten Spalte).

Es ist $|\underline{X}| = \sum_{j=1}^{J} x_{ij} X_{kj} = 0$ für $i \neq k$ bzw. $|\underline{X}| = \sum_{i=1}^{I} x_{ij} X_{ik} = 0$ für $j \neq k$.

Beispiel: $\underline{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $|\underline{X}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$|\underline{X}| \quad = (-1)^{2+1} * (4) * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} * 5 * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} * 6 * \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

= -4 * (2*9 - 3*8) + 5 * (2*9 - 3*7) - 6 * (2*8 - 2*7)

= -4 * (-6) + 5 * (-3) - 6 * 2

= 24 - 15 - 12

= -3

Entwicklung nach der dritten Spalte:

$$|\underline{X}| = (-1)^{1+3} * 3 * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} * 6 * \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} * 9 * \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

= 3 * (4*8 - 5*7) - 6 * (2*8 - 2*7) + 9 * (2*5 - 2*4)

= 3 * (-3) - 6 * 2 + 9 * 2

= -9 - 12 + 18

= -3.

1.2.11 Die Inverse einer quadratischen Matrix

Falls für eine quadratische Matrix $\underline{X}$ mit $|\underline{X}| \neq 0$ eine Matrix $\underline{X}^{-1}$ mit der Eigenschaft

$$\underline{XX}^{-1} = \underline{X}^{-1}\underline{X} = \underline{I}$$

existiert, dann heißt $\underline{X}^{-1}$ die inverse Matrix von $\underline{X}$.

Die Inverse einer Matrix $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ vom Typ (2,2) ist $\frac{1}{|\underline{X}|}\begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}$.

Beispiel: $\underline{X} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $|\underline{X}| = -1$

$$\underline{X}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{XX}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{I}.$$

Auch für nichtsinguläre quadratische Matrizen vom Typ (I,I) mit I > 2 läßt sich die Inverse berechnen. Für den allgemeinen Fall ist

$\underline{X}^{-1} = (x^{ij})$, mit $x^{ij} = \frac{X_{ji}}{|\underline{X}|}$, wobei X_{ji} der Kofaktor zu x_{ji} ist.

Multipliziert man $\underline{X}$ mit der auf diese Weise gebildeten Matrix $\underline{X}^{-1}$, $\underline{XX}^{-1} = \underline{I}$, so erhält man für das Element $\underline{i}_{ii}$

$$x_{i1}x^{1i} + x_{i2}x^{2i} + \ldots + x_{il}x^{li} = \frac{1}{|\underline{X}|}(x_{i1}X_{i1} + x_{i2}X_{i2} + \ldots + x_{il}X_{il}) = \frac{1}{|\underline{X}|}|\underline{X}| = 1$$

und für das Element i_{ij} mit $i \neq j$

$$x_{i1}x^{1j} + x_{i2}x^{2j} + \ldots + x_{il}x^{lj} = \frac{1}{|\underline{X}|}(x_{i1}X_{j1} + x_{i2}X_{j2} + \ldots + x_{il}X_{jl}) = 0.$$

Folglich erhält man in der Tat die Einheitsmatrix $\underline{I}$.

Für eine orthogonale Matrix $\underline{T}$ ist die inverse Matrix $\underline{T}^{-1} = \underline{T}'$.

Ist $\underline{D}$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen d_{ii}, so erhält man $\underline{D}^{-1} = (d^{ij})$, indem man die Diagonalelemente $d^{ii} = \frac{1}{d_{ii}}$ bildet.

Beispiel: Gegeben sei die Matrix $\underline{X} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{pmatrix}$ mit $|\underline{X}| = 2$.

Man erhält die Kofaktoren

$X_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -8 & 15 \\ -15 & 34 \end{vmatrix} = -47$, $X_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -15 & 34 \end{vmatrix} = 3$, $X_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -8 & 15 \end{vmatrix} = -11$

$X_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 15 \\ 10 & 34 \end{vmatrix} = -54$, $X_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 10 & 34 \end{vmatrix} = 2$, $X_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = -12$

$X_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = -10$, $X_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = 0$, $X_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -2$.

Also ist $\underline{XX}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -47 & 3 & -11 \\ -54 & 2 & -12 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.12 Die Eigenwertzerlegung einer symmetrischen Matrix

Man nennt eine symmetrische Matrix gramsch, wenn sie sich in der Form $\underline{S} = \underline{AA}'$ schreiben läßt. Die Untersuchung, ob und wie eine mögliche Zerlegung $\underline{S} = \underline{AA}'$ gefunden werden kann, führt auf das Problem der Eigenwertzerlegung. Die Eigenwertzerlegung ist für viele multivariate Analyseverfahren von zentraler Bedeutung.

Es sei $\underline{S}$ eine symmetrische Matrix vom Typ (I,I), $\underline{e}$ ein Einheitsvektor und λ eine Zahl. Wenn es eine exakte Lösung für die Gleichung

$$\underline{Se} = \lambda\underline{e}$$

gibt, dann heißt λ ein Eigenwert von $\underline{S}$ und $\underline{e} \neq \underline{0}$ der zugehörige Eigenvektor.

Die o.g. Gleichung läßt sich umstellen zu

$$(\underline{S} - \lambda\underline{I})\,\underline{e} = \underline{0}.$$

Wenn diese Gleichung erfüllt ist, dann muß das Skalarprodukt aller Zeilen von $(\underline{S} - \lambda\underline{I})$ mit dem Vektor $\underline{e}$ Null sein. Dann steht der Vektor $\underline{e}$ senkrecht auf allen Zeilen von $(\underline{S} - \lambda\underline{I})$. Steht ein Vektor mit I Komponenten auf I Vektoren mit I Komponenten senkrecht, dann sind diese linear abhängig. Folglich ist

$$|\underline{S} - \lambda \underline{I}| = 0.$$

$|\underline{S} - \lambda\underline{I}|$ ist ein Polynom I-ten Grades und heißt charakteristisches Polynom der Matrix $\underline{S}$. Im Falle einer Matrix vom Typ (2,2) lassen sich Eigenwerte und Eigenvektoren ohne großen Aufwand per Hand berechnen.

Beispiel:

Es sei $\underline{S} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

$$|\underline{S} - \lambda\underline{I}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Dies ergibt $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 2$.

$\underline{e}_1$ sei der λ_1 zugehörige Eigenvektor, also $(\underline{S} - \lambda_1)\,\underline{e}_1 = \underline{0}$. Setzt man den ersten Eigenwert in diese Gleichung ein, so erhält man für unser Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3-5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$-2e_{11} + \sqrt{2}\,e_{12} = 0 \quad \text{(I) bzw.}$$
$$\sqrt{2}\,e_{11} - e_{12} = 0.$$

Nun ist $\underline{e}_1$ ein Einheitsvektor, also

$$e_{11}^2 + e_{12}^2 = 1. \qquad \text{(II)}$$

Nach der Gleichung (I) ist $e_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} e_{12}$. Dies in (II) eingesetzt ergibt $(\frac{\sqrt{2}}{2} e_{12})^2 + e_{12}^2 = 1$, also $e_{12} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0{,}8165$. Also ist $e_{11} = \mp\sqrt{\frac{2}{3}} * \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \mp 0{,}5774$, je nachdem, ob e_{12} positiv oder negativ genommen wurde. Analog findet man die Komponenten des zweiten Eigenvektors.

Es seien λ_j und λ_k zwei verschiedene Eigenwerte und $\underline{e}_j$ und $\underline{e}_k$ die zugehörigen Eigenvektoren, so daß

$$\underline{S}\underline{e}_j = \lambda_j \underline{e}_j \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{S}\underline{e}_k = \lambda_k \underline{e}_k.$$

Die Multiplikation von links mit $\underline{e}_k'$ bzw. $\underline{e}_j'$ ergibt

$$\underline{e}_k'\underline{S}\underline{e}_j = \lambda_j \underline{e}_k'\underline{e}_j \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{e}_j'\underline{S}\underline{e}_k = \lambda_k \underline{e}_j'\underline{e}_k.$$

Da $\underline{e}_k'\underline{S}\underline{e}_j = \underline{e}_j'\underline{S}\underline{e}_k$, ergibt die Substraktion der zweiten Gleichung von der ersten

$$0 = (\lambda_j - \lambda_k)\, \underline{e}_k'\underline{e}_j.$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_k$, ist $\underline{e}_k'\underline{e}_j = 0$. Also stehen alle Eigenvektoren senkrecht aufeinander. Da die Eigenvektoren die Länge Eins haben, ist die Matrix $\underline{E}$ der spaltenweise zusammengestellten Eigenvektoren orthogonal. Daher ist $\underline{E}'\underline{E} = \underline{E}\underline{E}' = \underline{I}$.

Für alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix $\underline{S}$ gilt:

$$\underline{S}\underline{e}_1 = \lambda_1 \underline{e}_1,\ \underline{S}\underline{e}_2 = \lambda_2 \underline{e}_2,\ \ldots,\ \underline{S}\underline{e}_l = \lambda_l \underline{e}_l.$$

Nun werden die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix $\underline{S}$ bestimmt und in einer Diagonalmatrix $\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_l \end{pmatrix}$ angeordnet, wobei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_l$, und werden die zu den Eigenwerten λ_i gehörigen Eigenvektoren spaltenweise zu einer Matrix $\underline{E}$ = $\begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_I \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \end{pmatrix}$ zusammengestellt. Dann ist

$$\underline{S}\underline{E} = \underline{E}\underline{\Lambda} \qquad \text{und} \qquad \underline{S} = \underline{E}\underline{\Lambda}\underline{E}'.$$

Sind alle $\lambda_i \geq 0$, dann kann man die Zahlen $\sqrt{\lambda_i}$ bilden und in der Matrix $\underline{\Lambda}^{1/2}$ = $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_I} \end{pmatrix}$ zusammenstellen. Dann wird $\underline{S} = \underline{E}\underline{\Lambda}^{1/2}\underline{\Lambda}^{1/2}\underline{E}' = (\underline{E}\underline{\Lambda}^{1/2})(\underline{E}\underline{\Lambda}^{1/2})'$. Wird $\underline{A} = \underline{E}\underline{\Lambda}^{1/2}$ gesetzt, so ist $\underline{S} = \underline{A}\underline{A}'$ erreicht. Diese Zerlegung einer Matrix heißt kanonische Zerlegung.

Einige wichtige Eigenschaften in diesem Zusammenhang sind

- Ist $\underline{S}$ gramsch, so bedeutet dies, daß alle Eigenwerte von $\underline{S}$ nichtnegativ sind.
- Jede Kovarianzmatrix ist gramsch.
- Der Rang von $\underline{S}$ ist gleich der Zahl der von Null verschiedenen Eigenwerte von $\underline{S}$.

- Sind q der Eigenwerte von $\underline{S}$ Null, dann kann man diese Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren weglassen, so daß $\underline{S} = \underline{E}^*\underline{\Lambda}^*\underline{E}^{*\prime}$ mit Typ $\underline{S}$ = (I,I), Typ $\underline{E}^*$ = (I,I-q) und Typ $\underline{\Lambda}^*$ = (I-q,I-q). Nun ist $\underline{E}^{*\prime}\underline{E}^* = \underline{I}$, aber $\underline{E}^*\underline{E} \neq \underline{I}$.

Von großer Praktischer Bedeutung ist der folgende Zusammenhang: $\underline{S}$ sei eine symmetrische Matrix vom Typ (I,I). Der Rang von $\underline{S} = r \leq I$. $\underline{S}$ habe nichtnegative und verschiedene von Null verschiedene Eigenwerte. Es gilt $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r > \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_I = 0$. Gesucht ist eine symmetrische gramsche Matrix $\underline{P}$ mit Rang $\underline{P} < r$ als optimale Annäherung im Sinn der kleinsten Quadrate[1] an $\underline{S}$. Um diese Matrix $\underline{P}$ zu erhalten, muß man eine Eigenwertzerlegung der Matrix $\underline{S}$ durchführen. In der Eigen-

[1] Das „Prinzip der kleinsten Quadrate“ bezeichnet ein Näherungsverfahren, in dem die Quadrate der Abweichungen so gering wie möglich sind.

wertmatrix behält man nur die p größten Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren in der Eigenvektormatrix bei. Dieses Varfahren ist die grundlegende Operation in multivariaten Verfahren, z.B. in der Hauptkomponentenanalyse oder in der Korrespondenzanalyse.

1.2.13 Die Singulärwertzwerlegung einer Matrix

Bei der Singulärwertzerlegung einer Matrix - auch: Eckart-Young-Zerlegung einer Matrix - handelt es sich um die Zerlegung einer Matrix $\underline{M}$ in $\underline{E\Lambda F'}$. Die Singulärwertzerlegung ist die Verallgemeinerung der Eigenwertzerlegung einer symmetrischen Matrix. Im Gegensatz zur Eigenwertzerlegung braucht die Matrix in der Singulärwertzerlegung weder symmetrisch noch quadratisch zu sein. $\underline{E}$ hat paarweise orthogonale Spaltenvektoren der Länge Eins, $\underline{F}'$ hat paarweise orthogonale Zeilenvektoren der Länge Eins. Also sind $\underline{E}'\underline{E}$ und $\underline{F}'\underline{F}$ Einheitsmatrizen. $\underline{\Lambda}$ ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente λ_i als positiv und in schwach abfallender Aufeinanderfolge angenommen werden können, also $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq 0$. Diese Diagonalelemente heißen „singuläre Werte“ von $\underline{M}$. Die Existenz der Eigenwertzerlegung wird vorausgesetzt.

In der Herleitung der Singulärwertzerlegungerlegung wird der Regelfall angenommen: Typ $\underline{M}$ = (n,m) mit $n \geq m$ (der Fall $n < m$ ist durch Transposition des noch herzuleitenden Ergebnisses erledigt).

Es sei Rang $\underline{M} = r \leq m$. $\underline{MM}'$ hat nur nichtnegative Eigenwerte (ist gramsch). Da es sich bei $\underline{MM}'$ um eine symmetrische Matrix handelt, gelte die Eigenwertzerlegung $\underline{MM}' = \underline{E\Lambda^2 E}'$. $\underline{E}$ hat r orthogonale Spaltenvektoren der Länge Eins, $\underline{\Lambda}^2$ ist diagonal vom Typ (r,r), und die Diagonalelemente können in der Anordnung $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq ... \geq \lambda_r^2 > 0$ angenommen werden. Offensichtlich ist $\underline{E}'\underline{E} = \underline{I}$ vom Typ (r, r).

Es folgt $\underline{\Lambda}^{-1}\underline{E}'\underline{MM}'\underline{E\Lambda}^{-1} = (\underline{\Lambda}^{-1}\underline{E}'\underline{M}) (\underline{\Lambda}^{-1}\underline{E}'\underline{M})' = \underline{I}$. Die Matrix $\underline{\Lambda}^{-1}$ existiert und ist reell.
$\underline{\Lambda}^{-1}\underline{E}'\underline{M}$ ist vom Typ (r,n) und besteht also aus r orthogonalen Zeilenvektoren der Länge Eins. Es sei $\underline{F}' = \underline{\Lambda}^{-1}\ \underline{E}'\underline{M}$. Durch Multiplikation von links folgt

(I) $\underline{EE}'\underline{M} = \underline{E\Lambda F}'$, wobei im allgemeinen $\underline{EE}' \neq \underline{I}$.

$\underline{E}$ ist die Matrix der Eigenvektoren von $\underline{MM}'$ und besteht spaltenweise aus r orthogonalen Einheitsvektoren. Es wird nun ein beliebiger Satz von weiteren n - r orthogonalen Einheitsvektoren gebildet, die auch zu den Spaltenvektoren von $\underline{E}$ orthogonal sein sollen. Nach geometrischen Überlegungen ist dies möglich. Die neuen Vektoren werden spaltenweise als Matrix $\underline{P}$ zusammengestellt. Wird nun $\underline{P}$ neben $\underline{E}$ gestellt, so ergibt sich eine Matrix

$$\underline{T} = (\underline{E} \mid \underline{P}),$$

wobei $\underline{T}$ orthogonal ist. Die Transposition liefert $\underline{T}' = \begin{pmatrix} \underline{E}' \\ \underline{P}' \end{pmatrix}$. Daher ist

(II) $\underline{TT}' = \underline{EE}' + \underline{PP}' = \underline{I}$ vom Typ (n,n).

Ferner ist nach Konstruktion $\underline{P}'\underline{E} = \underline{0}$ vom Typ (n-r, r) und $\underline{E}'\underline{P} = \underline{0}$ vom Typ (r,n-r). Wird $\underline{MM}' = \underline{E\Lambda^2E}'$ von links mit $\underline{P}'$ und von rechts mit $\underline{P}$ multipliziert, so folgt

$$\underline{P}'\underline{MM}'\underline{P} = (\underline{P}'\underline{M})\,(\underline{P}'\underline{M})' = (\underline{P}'\underline{E})\underline{\Lambda}^2(\underline{E}'\underline{P}) = \underline{0}$$

vom Typ (n-r,n-r). Insbesondere läßt sich ablesen, daß jeder Zeilenvektor von $\underline{P}'\underline{M}$ ein Nullvektor ist. Also ist $\underline{P}'\underline{M} = \underline{0}$ vom Typ (n-r,m). Folglich ist dann auch

(III) $\underline{PP}'\underline{M} = \underline{0}$ vom Typ (n,m).

Die Addition von (I) und (III) ergibt unter Berücksichtigung von (II)

$$\begin{array}{rll} \underline{EE}'\underline{M} & = \underline{E\Lambda F}' & \text{vom Typ (n,m)} \\ \underline{PP}'\underline{M} & = \underline{0} & \text{vom Typ (n,m)} \\ \hline (\underline{EE}' + \underline{PP}')\underline{M} & = \underline{E\Lambda F}' & \\ \underline{M} & = \underline{E\Lambda F}' & \end{array}$$

Dies ist das gewünschte Ergebnis. Durch Eigenwertzerlegung von $\underline{MM}'$ läßt sich $\underline{E}$ bestimmen. $\underline{F}$ erhält man schließlich als $\underline{F}' = \underline{\Lambda}^{-1}\underline{E}'\underline{M}$.